

Sonsuz Boyutlu Sistemlerin Kararlılaştırılması için Sonlu Boyutlu Denetleyici Tasarımı

Kemal Cem Yılmaz

cemyilmaz@iyte.edu.tr

İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü

38. Ulusal Matematik Sempozyumu

Dicle Üniversitesi, Diyarbakır

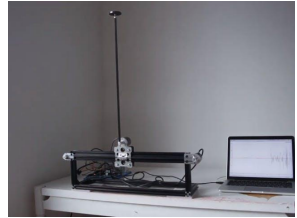
31 Ağustos–03 Eylül 2026



(a) Sıcaklık kontrolü

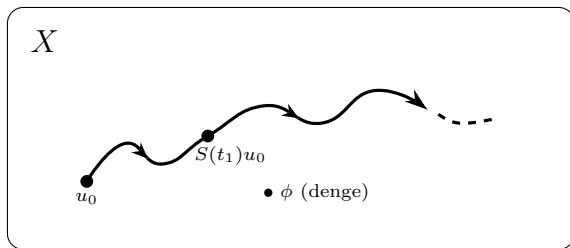


(b) Seyir kontrolü



(c) Ters sarkacın dengelenmesi

Doğal evrim $\xrightarrow{\text{Kontrol girdisi}}$ Arzu edilen evrim



Şekil: $\{S(t)u_0 : t \geq 0\}$: u_0 başlangıç durumundan çıkan yörünge.

- Durum uzayı: X . Sistemin alabileceği tüm durumların oluşturduğu uzay.
- Evrim operatörü: her $t \geq 0$ için $S(t) : X \rightarrow X$.
- Sistemin boyutu: $\dim(X)$.

Üstel kararlılık. Denge çözümü ϕ , bazı $M \geq 1, \omega > 0$ için

$$\|S(t)u_0 - \phi\|_X \leq Me^{-\omega t}\|u_0 - \phi\|_X, \quad t \geq 0, \quad u_0 \in X,$$

ise üstel kararlıdır.

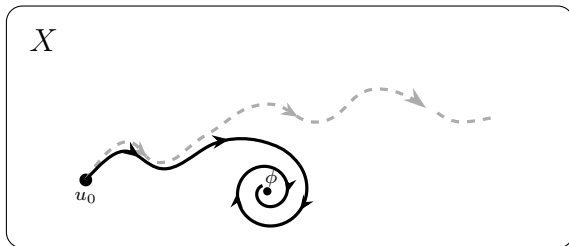
Üstel kararlılık. Denge çözümü ϕ , bazı $M \geq 1, \omega > 0$ için

$$\|S(t)u_0 - \phi\|_X \leq Me^{-\omega t}\|u_0 - \phi\|_X, \quad t \geq 0, \quad u_0 \in X,$$

ise üstel karardır.

Bir sistemi kontrol etmek: İstenen bir amacı gerçekleştirmek üzere sistemin yörüngelerinin davranışını etkileme eylemidir.

Denetleyici tasarımı problemi: Sistemin istenen davranışı göstermesini sağlayacak uygun kontrol yasasının belirlenmesi problemidir.



Şekil: Aynı başlangıç durumu için kontrolsüz ve kontrol girdisi etkisi altındaki yörüngeler.

Kontrol girdisinin uygulandığı yere göre: bölge içi denetleyiciler ve sınır denetleyicileri.

Kontrol girdisinin oluşturulmasına göre: açık çevrim denetleyiciler ve geri beslemeli denetleyiciler.

Sonlu boyutlu denetleyici: Kontrol girdisini, sistem durumundan elde edilen sonlu sayıda bileşene dayalı olarak oluşturan denetleyici.

Soru

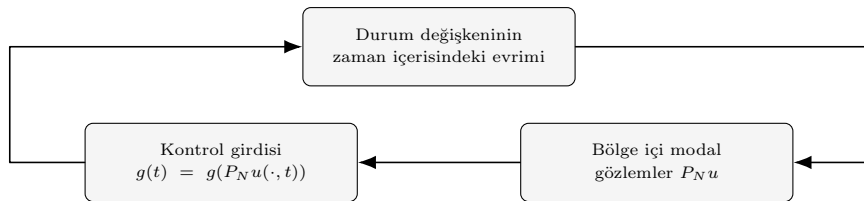
Sonsuz boyutlu bir sistem, sonlu boyutlu bir denetleyici ile kararlılaştırılabilir mi?

Soru

Sonsuz boyutlu bir sistem, sonlu boyutlu bir denetleyici ile kararlılaştırılabilir mi?

Sezgi

Kararsız dinamikler sonlu boyutlu bir altuzayda yer alıyorsa, sonlu boyutlu bir geri besleme yeterli olabilir.

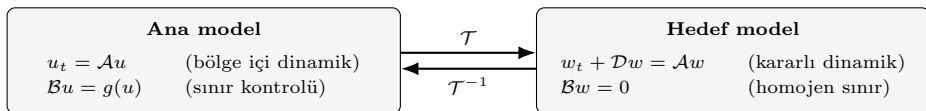


Şekil: Sonlu boyutlu geri besleme şeması.

Klasik geri-adım yöntemi

İki temel bileşen: dönüşüm ve hedef model.

- **Dönüşüm $\mathcal{T}$:** ana model ile hedef modelin durumları arasında terslenebilir bir eşleme.
- **Hedef model:** kararlı olacak şekilde tasarlanan yardımcı sistem.



Şekil: Klasik geri-adım şeması. $\mathcal{A}$ uzaysal diferansiyel operatör, $\mathcal{B}$ sınır koşullarını tanımlayan yapı, $\mathcal{D}w$ bölge içi kararlılaştırıcı terim.



M. Krstic, A. Smyshlyaev, *Boundary Control of PDEs*, Advances in Design and Control, vol. 16, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2008.

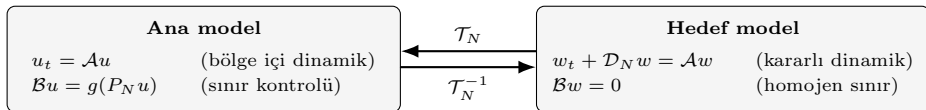


R. Vazquez vd., *Backstepping for partial differential equations: a survey*, Automatica J. IFAC, 183, 112572, 2026.

Sonlu boyutlu geri-adım tasarımı

Sonlu boyutlu tasarımda iki temel bileşen:

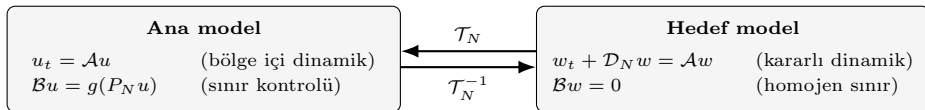
- **Dönüşüm** $\mathcal{T}_N$: sonlu sayıda modal bileşen kullanılarak tanımlanır.
- **Hedef model**: kararsız dinamikleri bastırmak için sonlu ranklı bir terim içerir.



Şekil: Sonlu boyutlu geri-adım şeması.

Sonlu boyutlu tasarımda iki temel bileşen:

- **Dönüşüm** $\mathcal{T}_N$: sonlu sayıda modal bileşen kullanılarak tanımlanır.
- **Hedef model**: kararsız dinamikleri bastırmak için sonlu ranklı bir terim içerir.



Şekil: Sonlu boyutlu geri-adım şeması.

Bu yapı beraberinde şu temel soruları getirir:

1. $\mathcal{T}_N : X \rightarrow X$ nasıl seçilmelidir? Hangi koşullar altında terslenebilir?
2. Hedef model nasıl tasarlanmalıdır? Sonlu ranklı bir terim kararsız dinamikleri hangi koşullar altında bastırabilir?

$X = L^2(0, L)$. Aşağıdaki biçimde bir dönüşüm (geri-adım dönüşümü) öneriyoruz:

$$u = \mathcal{T}_N w, \quad \mathcal{T}_N := I + \mathcal{K}P_N.$$

- $(\mathcal{K}\varphi)(x) := \int_0^x k(x, y)\varphi(y)dy$
- $k = k(x, y) \in C^\infty(\Delta_{x,y})$ çekirdek fonksiyonu, $\Delta_{x,y} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq L\}$.
- $P_N : L^2(0, L) \rightarrow E_N := \text{span}\{e_1, \dots, e_N\}$,

$$P_N \varphi = \sum_{j=1}^N (\varphi, e_j)_2 e_j, \quad \begin{cases} -e_j'' = \lambda_j e_j, & (0, L), \\ \mathcal{B}e_j = 0. \end{cases}$$

$\mathcal{T}_N$ dönüşümü

$X = L^2(0, L)$. Aşağıdaki biçimde bir dönüşüm (geri-adım dönüşümü) öneriyoruz:

$$u = \mathcal{T}_N w, \quad \mathcal{T}_N := I + \mathcal{K}P_N.$$

- $(\mathcal{K}\varphi)(x) := \int_0^x k(x, y)\varphi(y)dy$
- $k = k(x, y) \in C^\infty(\Delta_{x,y})$ çekirdek fonksiyonu, $\Delta_{x,y} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq L\}$.
- $P_N : L^2(0, L) \rightarrow E_N := \text{span}\{e_1, \dots, e_N\}$,

$$P_N \varphi = \sum_{j=1}^N (\varphi, e_j)_2 e_j, \quad \begin{cases} -e_j'' = \lambda_j e_j, & (0, L), \\ \mathcal{B}e_j = 0. \end{cases}$$

Motivasyon

1. Sınır kontrolü ile hedef modeldeki bölge içi sönümü sonlu sayıda modal bileşen üzerinden ilişkilendirmek istiyoruz.
2. $\mathcal{B}w = 0$ olduğundan,

$$\mathcal{B}u = \mathcal{B}\mathcal{K}P_N w.$$

Dolayısıyla $P_N w$ 'yi $P_N u$ cinsinden ifade edebilirsek, kontrol girdisini yalnızca $P_N u$ 'ya bağlı olarak yazabiliriz.

$\mathcal{T}_N$ dönüşümünün terslenebilirliği

$$\mathcal{T}_N = I + \mathcal{K}P_N, \quad X = L^2(0, L), \quad E_N = \text{span}\{e_1, \dots, e_N\}.$$

- $q \in E_N^\perp$ ise $\mathcal{T}_N q = (I + \mathcal{K}P_N)q = q$.
- $\mathcal{T}_N$ 'in birebirliği için $p \in E_N \setminus \{0\}$ iken $\mathcal{T}_N p \in E_N^\perp$ olup olmadığına bakabiliriz.

$$P_N \mathcal{T}_N p = P_N \mathcal{T} p = \sum_{k=1}^N e_k \underbrace{(\mathcal{T} p, e_k)_2}_{\stackrel{?}{=} 0}.$$

$\mathcal{T}_N$ dönüşümünün terslenebilirliği

$$\mathcal{T}_N = I + \mathcal{K}P_N, \quad X = L^2(0, L), \quad E_N = \text{span}\{e_1, \dots, e_N\}.$$

- $q \in E_N^\perp$ ise $\mathcal{T}_N q = (I + \mathcal{K}P_N)q = q$.
- $\mathcal{T}_N$ 'in birebirliği için $p \in E_N \setminus \{0\}$ iken $\mathcal{T}_N p \in E_N^\perp$ olup olmadığına bakabiliriz.

$$P_N \mathcal{T}_N p = P_N \mathcal{T} p = \sum_{k=1}^N e_k \underbrace{(\mathcal{T} p, e_k)_2}_{\stackrel{?}{=} 0}.$$

$$\widehat{p}_j = (p, e_j)_2, \quad j = 1, \dots, N,$$

$$0 \stackrel{?}{=} (\mathcal{T} p, e_k)_2 = \sum_{j=1}^N \widehat{p}_j (\mathcal{T} e_j, e_k)_2, \quad k = 1, \dots, N.$$

O halde $P_N \mathcal{T}_N : E_N \rightarrow E_N$ dönüşümünün $\{e_1, \dots, e_N\}$ bazındaki matrisini

$$\mathcal{M}_N := \begin{pmatrix} (\mathcal{T} e_1, e_1)_2 & \cdots & (\mathcal{T} e_N, e_1)_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathcal{T} e_1, e_N)_2 & \cdots & (\mathcal{T} e_N, e_N)_2 \end{pmatrix}$$

biçiminde yazabiliriz.

Özetle,

$$\exists p \in E_N \setminus \{0\} : \mathcal{T}_N p \in E_N^\perp \quad \Leftrightarrow \quad \ker \left(P_N \mathcal{T}_N|_{E_N} \right) \neq \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \det \mathcal{M}_N = 0.$$

Öte yandan $\mathcal{T}_N|_{E_N^\perp} = I$. Dolayısıyla, $\det \mathcal{M}_N = 0$ ise $\mathcal{T}_N$ birebir değildir.

$\mathcal{T}_N$ dönüşümünün terslenebilirliği

Özetle,

$$\exists p \in E_N \setminus \{0\} : \mathcal{T}_N p \in E_N^\perp \Leftrightarrow \ker \left(P_N \mathcal{T}_N|_{E_N} \right) \neq \{0\} \Leftrightarrow \det \mathcal{M}_N = 0.$$

Öte yandan $\mathcal{T}_N|_{E_N^\perp} = I$. Dolayısıyla, $\det \mathcal{M}_N = 0$ ise $\mathcal{T}_N$ birebir değildir.

Buna karşılık, $\det \mathcal{M}_N \neq 0$ olsun.

- $\varphi \in L^2(0, L)$, $\varphi = P_N \varphi + \varphi^{>N}$, $\varphi^{>N} := (I - P_N)\varphi \in E_N^\perp$.

$$\mathcal{T}_N \varphi = 0 \Rightarrow \mathcal{T}_N P_N \varphi + \varphi^{>N} = 0$$

$$\Rightarrow P_N \mathcal{T}_N P_N \varphi = 0 \Rightarrow P_N \varphi = 0, \quad (\det \mathcal{M}_N \neq 0)$$

$$\Rightarrow \varphi^{>N} = 0 \Rightarrow \varphi = 0.$$

- $f \in L^2(0, L)$ verilsin, $f = P_N f + f^{>N}$.

$$\mathcal{T}_N \varphi \stackrel{?}{=} f \Leftrightarrow \begin{cases} P_N \mathcal{T}_N P_N \varphi = P_N f, \\ (I - P_N) \mathcal{T}_N P_N \varphi + \varphi^{>N} = f^{>N}. \end{cases}$$

Lemma

$\mathcal{T}_N : L^2(0, L) \rightarrow L^2(0, L)$ dönüşümünün terslenebilir olması için gerek ve yeter şart $\det \mathcal{M}_N \neq 0$ olmasıdır.

$\mathcal{T}_N^{-1}$ için uygun bir temsil

Sonuç

$\det \mathcal{M}_N \neq 0$ olsun. Bu takdirde,

$$u = \mathcal{T}_N w \implies \mathcal{B}u = \mathcal{B}\mathcal{K}P_N w \implies \mathcal{B}u = \mathcal{B}\mathcal{K}P_N \mathcal{T}_N^{-1} u.$$

- ✓ Böylece kontrol girdisini geri besleme tipinde yazabiliriz.
- ✗ Ancak bu ifade henüz yalnızca $P_N u$ 'ya bağlı bir geri besleme biçiminde değil.

$\mathcal{T}_N^{-1}$ için uygun bir temsil

Sonuç

$\det \mathcal{M}_N \neq 0$ olsun. Bu takdirde,

$$u = \mathcal{T}_N w \implies \mathcal{B}u = \mathcal{B}\mathcal{K}P_N w \implies \mathcal{B}u = \mathcal{B}\mathcal{K}P_N \mathcal{T}_N^{-1} u.$$

- ✓ Böylece kontrol girdisini geri besleme tipinde yazabiliriz.
- ✗ Ancak bu ifade henüz yalnızca $P_N u$ 'ya bağlı bir geri besleme biçiminde değil.

$$u = \mathcal{T}_N w = w + \mathcal{K}P_N w \implies P_N u = P_N w + P_N \mathcal{K}P_N w = P_N \mathcal{T}(P_N w)$$

$$\stackrel{\det \mathcal{M}_N \neq 0}{\implies} P_N w = (P_N \mathcal{T}|_{E_N})^{-1} P_N u$$

$$\implies w = u - \underbrace{\mathcal{K} (P_N \mathcal{T}|_{E_N})^{-1} P_N u}_{\Phi_N u}.$$

Lemma

$\det \mathcal{M}_N \neq 0$ olsun. Bu takdirde $\mathcal{T}_N^{-1}$ operatörü

$$\mathcal{T}_N^{-1} = I - \mathcal{K} (P_N \mathcal{T}|_{E_N})^{-1} P_N =: I - \Phi_N, \quad \Phi_N \in \mathcal{L}(L^2(0, L))$$

biçiminde yazılır.

Sonuç (güncel)

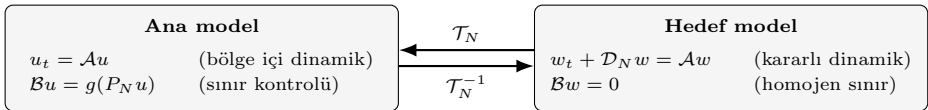
$\det \mathcal{M}_N \neq 0$ olsun. Bu takdirde kontrol girdisini

$$g(P_N u) = \mathcal{B}u = \mathcal{B}\mathcal{K}P_N w = \mathcal{B}\mathcal{K} (P_N \mathcal{T}|_{E_N})^{-1} P_N u$$

- ✓ geri besleme biçiminde,
- ✓ yalnızca $P_N u$ 'ya bağlı olarak yazabiliriz.

Örneğin, $N = 2$ için Dirichlet tipi kontrol girdisi $\mathcal{B}u = \begin{pmatrix} u(0) \\ u(L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g_R(P_2 u) \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} g_R(P_2 u) &= \int_0^L k(L, y) P_2 w(y) dy = \int_0^L k(L, y) \left[(P_2 \mathcal{T}|_{E_2})^{-1} P_2 u \right] (y) dy \\ &= \int_0^L k(L, y) \underbrace{\left[(P_2 \mathcal{T}|_{E_2})^{-1} P_2 u \right] (y)}_{(e_1(y) \ e_2(y)) \mathcal{M}_2^{-1} \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{pmatrix}} dy. \end{aligned}$$



Şekil: Sonlu boyutlu geri-adım şeması.

1. $\mathcal{T}_N : X \rightarrow X$ nasıl seçilmelidir? Hangi koşullar altında terslenebilir? ✓
2. Hedef model nasıl tasarlanmalıdır? Sonlu ranklı bir terim kararsız dinamikleri hangi koşullar altında bastırabilir?

$u = \mathcal{T}_N w$ dönüşümünü ana modelde yerine yazarak,

$$\left. \begin{array}{l} u_t = \mathcal{T}_N \mathcal{A}w - \mathcal{T}_N \mathcal{D}_N w \\ \mathcal{A}u = \mathcal{A} \mathcal{T}_N w \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{T}_N \mathcal{A}w - \mathcal{T}_N \mathcal{D}_N w - \mathcal{A} \mathcal{T}_N w = 0 \Rightarrow \mathcal{T}_N \mathcal{D}_N w = (\mathcal{K} P_N \mathcal{A} - \mathcal{A} \mathcal{K} P_N) w.$$

- $(P_N \mathcal{A})w = (\mathcal{A} P_N)w$ ise

$$\mathcal{T}_N \mathcal{D}_N w = (\mathcal{K} \mathcal{A} - \mathcal{A} \mathcal{K}) P_N w \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D}_N w = \mathcal{D}_N P_N w.$$

Böylece hedef modeldeki ilave terim yalnızca $P_N w$ 'ya bağlıdır.

- P_N ve $\mathcal{A}$ 'nın w üzerinde değişmeli olması, $\mathcal{T}_N : w \mapsto u$ yönünü doğal kılar (klasik geri-adım yönteminin aksine).

Uygulama 1: Reaksiyon-difüzyon modeli

$u_0 \in X = L^2(0, L)$, $\nu > 0$, $a \in \mathbb{R}$ öyle ki $N_0 := \#\{j \geq 1 : r_j \geq 0\}$.

$$\text{Ana model: } \begin{cases} u_t = \nu u_{xx} + au, & (x, t) \in (0, L) \times \{t > 0\}, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=L} = g_R(P_N u), & t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0, & x \in (0, L). \end{cases}$$

$g_R = 0$ ise

$$u(t) = \sum_{j=N_0+1}^{\infty} \underbrace{e^{r_j t}(u_0, e_j)_2 e_j}_{\substack{j\text{-inci kararlı modal} \\ \text{bileşenin zaman evrimi}}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{N_0} e^{r_j t}(u_0, e_j)_2 e_j}_{\in X_u}$$

$X_u := \text{span}\{e_j : r_j \geq 0\}$.

Uygulama 1: Reaksiyon-difüzyon modeli

$u_0 \in X = L^2(0, L)$, $\nu > 0$, $a \in \mathbb{R}$ öyle ki $N_0 := \#\{j \geq 1 : r_j \geq 0\}$.

$$\text{Ana model: } \begin{cases} u_t = \nu u_{xx} + au, & (x, t) \in (0, L) \times \{t > 0\}, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=L} = g_R(P_N u), & t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0, & x \in (0, L). \end{cases}$$

$g_R = 0$ ise

$$u(t) = \sum_{j=N_0+1}^{\infty} \underbrace{e^{r_j t}(u_0, e_j)_2 e_j}_{\substack{j\text{-inci kararlı modal} \\ \text{bileşenin zaman evrimi}}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{N_0} e^{r_j t}(u_0, e_j)_2 e_j}_{\in X_u}$$

$X_u := \text{span}\{e_j : r_j \geq 0\}$.

Dönüşüm: $u(x, t) = w(x, t) + \int_0^x k(x, y) P_N w(y, t) dy$, $P_N : L^2(0, L) \rightarrow \text{span}\{e_1, \dots, e_N\}$.

$$\text{Hedef model: } \begin{cases} w_t + \mathcal{D}_N w = \nu w_{xx} + aw, & (x, t) \in (0, L) \times \{t > 0\}, \\ w|_{x=0} = w|_{x=L} = 0, & t > 0, \\ w|_{t=0} = w_0 := \mathcal{T}_N^{-1} u_0, & x \in (0, L). \end{cases}$$

$$\mathcal{D}_N w = \mu P_N w, \quad \mu > 0.$$

Çekirdek modeli

$$\begin{cases} \nu (k_{xx} - k_{yy}) = -\mu k, \\ k(x, 0) = 0, \quad k(x, x) = -\frac{\mu x}{2\nu}, \end{cases}$$

$$(x, y) \in \Delta_{x,y} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq L\}.$$

Hedef model

$$\begin{cases} w_t + \mu P_N w = \nu w_{xx} + aw, \\ w|_{x=0} = w|_{x=L} = 0, \\ w|_{t=0} = w_0 := \mathcal{T}_N^{-1} u_0. \end{cases}$$

Uygulama 1: Reaksiyon-difüzyon modeli

$$\mathcal{D}_N w = \mu P_N w, \quad \mu > 0.$$

Çekirdek modeli

$$\begin{cases} \nu (k_{xx} - k_{yy}) = -\mu k, \\ k(x, 0) = 0, \quad k(x, x) = -\frac{\mu x}{2\nu}, \end{cases}$$

$$(x, y) \in \Delta_{x,y} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq L\}.$$

- Tek bir $k \in C^\infty(\Delta_{x,y})$ çözümü vardır:

$$k(x, y) = -\frac{\mu y}{2\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \left(-\frac{\mu}{4\nu}\right)^m \frac{(x^2 - y^2)^m}{m!(m+1)!}.$$

- k düzgün $\Rightarrow \mathcal{T}_N, L^2(0, L)$, üzerinde sınırlıdır.
- $k = k(x, y; \mu)$, μ 'ye analitik bağlı. Bu nedenle

$$\det \mathcal{M}_N(\mu) \neq 0,$$

koşulu μ 'ye bağlı olarak belirlenebilir.

Hedef model

$$\begin{cases} w_t + \mu P_N w = \nu w_{xx} + aw, \\ w|_{x=0} = w|_{x=L} = 0, \\ w|_{t=0} = w_0 := \mathcal{T}_N^{-1} u_0. \end{cases}$$

Uygulama 1: Reaksiyon-difüzyon modeli

$$\mathcal{D}_N w = \mu P_N w, \quad \mu > 0.$$

Çekirdek modeli

$$\begin{cases} \nu (k_{xx} - k_{yy}) = -\mu k, \\ k(x, 0) = 0, \quad k(x, x) = -\frac{\mu x}{2\nu}, \end{cases}$$

$$(x, y) \in \Delta_{x,y} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq L\}.$$

- Tek bir $k \in C^\infty(\Delta_{x,y})$ çözümü vardır:

$$k(x, y) = -\frac{\mu y}{2\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \left(-\frac{\mu}{4\nu}\right)^m \frac{(x^2 - y^2)^m}{m!(m+1)!}.$$

- k düzgün $\Rightarrow \mathcal{T}_N, L^2(0, L)$, üzerinde sınırlıdır.
- $k = k(x, y; \mu)$, μ 'ye analitik bağlı. Bu nedenle

$$\det \mathcal{M}_N(\mu) \neq 0,$$

koşulu μ 'ye bağlı olarak belirlenebilir.

Hedef model

$$\begin{cases} w_t + \mu P_N w = \nu w_{xx} + a w, \\ w|_{x=0} = w|_{x=L} = 0, \\ w|_{t=0} = w_0 := \mathcal{T}_N^{-1} u_0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_2^2 &= -\nu \|w_x\|_2^2 \\ &\quad + a \|w\|_2^2 - \mu \|P_N w\|_2^2. \end{aligned}$$

- Amaç: enerji hesabını $P_N w$ ve $(I - P_N)w$ bileşenleri üzerinden yürütmek.

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_2^2 = -\nu \|w_x\|_2^2 + a \|w\|_2^2 - \mu \|P_N w\|_2^2.$$

$P_N w$ bileşeni

$$\begin{aligned} & -\nu \|(P_N w)_x\|_2^2 + (a - \mu) \|P_N w\|_2^2 \\ & \leq \\ & (-\nu \lambda_1 + a - \mu) \|P_N w\|_2^2. \end{aligned}$$

$(I - P_N)w$ bileşeni

$$\begin{aligned} & -\nu \|((I - P_N)w)_x\|_2^2 + a \|(I - P_N)w\|_2^2 \\ & \leq \\ & (-\nu \lambda_{N+1} + a) \|(I - P_N)w\|_2^2 \end{aligned}$$

$$-\gamma := \max \{-\nu \lambda_1 + a - \mu, -\nu \lambda_{N+1} + a\} < 0.$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_2^2 \leq -\gamma \|w\|_2^2.$$

Uygulama 1: Reaksiyon-difüzyon modeli

Hatırlatma: $a - \nu\lambda_j \geq 0$, $j = 1, \dots, N_0$ ve $a - \nu\lambda_{N_0+1} < 0$.

$$\|w(\cdot, t)\|_2 \leq e^{-\gamma(\mu, N)t} \|w_0\|_2, \quad -\gamma = \max \left\{ \underbrace{a - \nu\lambda_1 - \mu}_{\text{kontrol edilen blok}}, \underbrace{a - \nu\lambda_{N+1}}_{\text{kontrol edilmeyen kısım}} \right\} < 0.$$

Minimal mod problemi: $\gamma > 0$ olacak şekilde N en az kaç olabilir?

Yanıt: $N = N_0 = \#\{j \geq 1 : a - \nu\lambda_j \geq 0\}$.

Hızlı kararlılaştırma problemi: γ istenildiği kadar büyük yapılabilir mi?

Yanıt: Evet. N ve μ birlikte yeterince büyük seçilmelidir.

Uygulama 1: Reaksiyon-difüzyon modeli

Hatırlatma: $a - \nu\lambda_j \geq 0$, $j = 1, \dots, N_0$ ve $a - \nu\lambda_{N_0+1} < 0$.

$$\|w(\cdot, t)\|_2 \leq e^{-\gamma(\mu, N)t} \|w_0\|_2, \quad -\gamma = \max \left\{ \underbrace{a - \nu\lambda_1 - \mu}_{\text{kontrol edilen blok}}, \underbrace{a - \nu\lambda_{N+1}}_{\text{kontrol edilmeyen kısım}} \right\} < 0.$$

Minimal mod problemi: $\gamma > 0$ olacak şekilde N en az kaç olabilir?

Yanıt: $N = N_0 = \#\{j \geq 1 : a - \nu\lambda_j \geq 0\}$.

Hızlı kararlılaştırma problemi: γ istenildiği kadar büyük yapılabilir mi?

Yanıt: Evet. N ve μ birlikte yeterince büyük seçilmelidir.

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t)\|_2 &\leq \|\mathcal{T}_N\| \|w(\cdot, t)\|_2 \\ &\leq e^{-\gamma(\mu, N)t} \|\mathcal{T}_N\| \|w_0\|_2 \\ &\leq e^{-\gamma(\mu, N)t} \|\mathcal{T}_N\| \|\mathcal{T}_N^{-1}\| \|u_0\|_2, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Uygulama 2: sönümlü dalga modeli

$(u_0, u_1) \in X = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)$, $a, b > 0$, $c \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ana model: } \begin{cases} u_{tt} + bu_t = c^2 u_{xx} + au, & (x, t) \in (0, L) \times \{t > 0\}, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=L} = g_R(P_N u), & t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \quad u_t|_{t=0} = u_1, & x \in (0, L). \end{cases}$$

$v = u_t + \delta u$, $0 < \delta < b$ değişken dönüşümü ile

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \mathcal{A}_\delta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_\delta := \begin{pmatrix} -\delta I & I \\ c^2 \partial_{xx} + (a + \delta(b - \delta))I & -(b - \delta)I \end{pmatrix}.$$

$$\text{Dönüşüm: } \begin{cases} \mathbf{T}_N = I + \mathbf{K} \mathbf{P}_N, & \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathcal{K} & 0 \\ 0 & \mathcal{K} \end{pmatrix}, & \mathbf{P}_N = \begin{pmatrix} P_N & 0 \\ 0 & P_N \end{pmatrix}, \\ \mathbf{P}_N : X \rightarrow \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} e_j \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e_j \end{pmatrix} : j = 1, \dots, N \right\}. \end{cases}$$

$$\text{Hedef model: } \begin{pmatrix} w_t \\ z_t \end{pmatrix} + \mathbf{D}_N \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \mathcal{A}_\delta \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_N := \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{11} & \mathcal{D}_{12} \\ \mathcal{D}_{21} & \mathcal{D}_{22} \end{pmatrix}.$$

Eşleştirme hesabı sonucunda, uygun çekirdek fonksiyonu için $\mathcal{D}_{21} = \mu P_N$,
 $\mathcal{D}_{11} = \mathcal{D}_{12} = \mathcal{D}_{22} = 0$.

Uygulama 2: sönümlü dalga modeli

$$\begin{cases} w_t = -\delta w + z, \\ z_t = -B_{\delta,N,\mu} w - (b - \delta)z, \end{cases} \quad B_{\delta,N,\mu} := -c^2 \partial_{xx} - aI + \mu P_N - \delta(b - \delta)I$$

Enerji argümanları kullanarak

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z\|_2^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \underbrace{(B_{\delta,N,\mu} w, w)_2}_{\stackrel{?}{\gtrsim} \|w_x\|_2^2} = -\delta (B_{\delta,N,\mu} w, w)_2 - (b - \delta) \|z\|_2^2.$$

Uygulama 2: sönümlü dalga modeli

$$\begin{cases} w_t = -\delta w + z, \\ z_t = -B_{\delta,N,\mu} w - (b - \delta)z, \end{cases} \quad B_{\delta,N,\mu} := -c^2 \partial_{xx} - aI + \mu P_N - \delta(b - \delta)I$$

Enerji argümanları kullanarak

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z\|_2^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \underbrace{(B_{\delta,N,\mu} w, w)_2}_{\stackrel{?}{\gtrsim} \|w_x\|_2^2} = -\delta (B_{\delta,N,\mu} w, w)_2 - (b - \delta) \|z\|_2^2.$$

$P_N w$ bileşeni	$(I - P_N)w$ bileşeni
$c^2 \ (P_N w)_x\ _2^2 - [a + \delta(b - \delta) - \mu] \ P_N w\ _2^2$ $\geq [c^2 \lambda_1 - a + \mu - \delta(b - \delta)] \ P_N w\ _2^2$ $\geq \frac{c^2 \lambda_1 - a + \mu - \delta(b - \delta)}{\lambda_N} \ (P_N w)_x\ _2^2$	$c^2 \ ((I - P_N)w)_x\ _2^2 - [a + \delta(b - \delta)] \ (I - P_N)w\ _2^2$ $\geq \left(c^2 - \frac{a + \delta(b - \delta)}{\lambda_{N+1}} \right) \ ((I - P_N)w)_x\ _2^2$

$$\min \{ c^2 \lambda_1 - a + \mu, c^2 \lambda_{N+1} - a \} - \delta(b - \delta) > 0$$

$$\Rightarrow (B_{\delta,N,\mu} w, w)_2 \gtrsim \|w_x\|_2^2.$$

Uygulama 2: sönümlü dalga modeli

$\mathcal{E}_\delta(t) := \|z(\cdot, t)\|_2^2 + (B_{\delta, N, \mu} w(\cdot, t), w(\cdot, t))_2$. Eğer

$$\max \left\{ \underbrace{a - c^2 \lambda_1 - \mu}_{\text{kontrol edilen blok}}, \underbrace{a - c^2 \lambda_{N+1}}_{\text{kontrol edilmeyen kısım}} \right\} < -\delta(b - \delta),$$

ise, bu takdirde

$$\mathcal{E}_\delta(t) \leq e^{-2\gamma_\delta t} \mathcal{E}_\delta(0), \quad t \geq 0, \quad \gamma_\delta = \min\{\delta, b - \delta\}.$$

Uygulama 2: sönümlü dalga modeli

$\mathcal{E}_\delta(t) := \|z(\cdot, t)\|_2^2 + (B_{\delta, N, \mu} w(\cdot, t), w(\cdot, t))_2$. Eğer

$$\max \left\{ \underbrace{a - c^2 \lambda_1 - \mu}_{\text{kontrol edilen blok}}, \underbrace{a - c^2 \lambda_{N+1}}_{\text{kontrol edilmeyen kısım}} \right\} < -\delta(b - \delta),$$

ise, bu takdirde

$$\mathcal{E}_\delta(t) \leq e^{-2\gamma_\delta t} \mathcal{E}_\delta(0), \quad t \geq 0, \quad \gamma_\delta = \min\{\delta, b - \delta\}.$$

Hatırlatma: $r_j^\pm = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + a - c^2 \lambda_j}$, $\operatorname{Re} r_j^+ \geq 0, j = 1, \dots, N_0$, $\operatorname{Re} r_{N_0+1}^+ < 0$.

Minimal mod problemi: Üstel kararlılık sağlanacak şekilde N en az kaç olabilir?

Yanıt:

$$N = N_0 := \#\{j \geq 1 : a - c^2 \lambda_j \geq 0\}.$$

Hızlı kararlılaştırma problemi: Üstel azalma hızı istenildiği kadar büyük yapılabilir mi?

Yanıt: Hayır. Ulaşılabilecek en büyük üstel azalma hızı

$$\gamma_{\max} = \frac{b}{2}.$$

Uygulama 3: faz-alan denklem sistemi

$$(\phi_0, u_0) \in X = L^2(0, L) \times L^2(0, L).$$

$$\text{Ana Model: } \begin{cases} \phi_t = \kappa \phi_{xx} + a\phi + 2u, & x \in (0, L), t \in \mathbb{R}^+, \\ u_t = -\frac{\nu \xi}{2} \phi_{xx} + \nu u_{xx}, & x \in (0, L), t \in \mathbb{R}^+, \\ \phi|_{x=0} = 0, \phi|_{x=L} = g(P_N \phi), \quad u|_{x=0} = 0, u|_{x=L} = h(P_M u), & t \in \mathbb{R}^+, \\ \phi|_{t=0} = \phi_0, \quad u|_{t=0} = u_0, & x \in (0, L). \end{cases}$$

$$\text{Dönüşüm: } \begin{cases} \mathbf{T}_{N,M}^\vartheta := \mathbf{I} + \mathbf{V}^\vartheta \mathbf{P}_{N,M}, & (\mathbf{V}^\vartheta \mathbf{F})(x) := \int_0^x \mathbf{K}^\vartheta(x, y) \mathbf{F}(y) dy, & \vartheta \in \{0, 1\}, \\ \mathbf{F} \in X, & \mathbf{K}^\vartheta(x, y) := \begin{pmatrix} k_1(x, y) & 0 \\ 0 & \vartheta k_2(x, y) \end{pmatrix}, & \mathbf{P}_{N,M} := \begin{pmatrix} P_N & 0 \\ 0 & P_M \end{pmatrix}. \end{cases}$$

$\vartheta = 1$, çift eyleyicili durum (kontrol girdisi sayısı = durum bileşeni sayısı):

- ✓ Hızlı kararlılaştırma problemi.
- ✓ Minimal mod çifti (N, M) ile kararlılaştırma problemi.

$\vartheta = 0$, eksik eyleyicili durum (kontrol girdisi sayısı < durum bileşeni sayısı):

$$\text{Hedef model: } \begin{cases} \psi_t - \kappa \psi_{xx} + \kappa \mu P_N \psi = a\psi + 2\mathcal{T}_{N,\mu}^{-1} u, & x \in (0, L), t \in \mathbb{R}^+, \\ u_t - \nu u_{xx} = -\frac{\nu \xi}{2} (\mathcal{T}_{N,\mu} \psi)_{xx}, & x \in (0, L), t \in \mathbb{R}^+, \\ \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, \quad u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

- **Kısıt:** $\|\mathcal{T}_{N,\mu}\|, \|\mathcal{T}_{N,\mu}^{-1}\|$ operatörlerinin μ bağımlılığı, μ değerinin keyfi olarak büyük seçilmesine engel.
- μ kararsızlığı bastıracak kadar büyük, operatör normlarından kaynaklanan terimleri baskın hale getirmeyecek kadar küçük seçilmeli.

Uygulama 4 (nümerik örnek): tek kararsız modlu CGL modeli

$$\begin{cases} u_t - (1 + 3i)u_{xx} + (1 + 4i)|u|^2u - 15u = 0, & x \in (0, 1), t \in \mathbb{R}^+, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=1} = g_R(P_1 u), & t \in \mathbb{R}^+, \\ u_0(x) = \frac{3}{2}x(2 - x) + 2i \sin(\frac{3\pi x}{2}), & x \in (0, 1). \end{cases}$$

$$r_j = 15 - (1 + 3i)\lambda_j, \quad \lambda_j = \left(\frac{(2j-1)\pi}{2}\right)^2, \text{ olup}$$

$$\operatorname{Re} r_1 > 0, \quad \operatorname{Re} r_j < 0, \quad j \geq 2.$$

Dolayısıyla $g_R = 0$ ise sıfır denge çözümü kararsızdır.

Uygulama 4 (nümerik örnek): tek kararsız modlu CGL modeli

$N = 1$, $\mu = 20$. Bu değerler altında $(\mathcal{T}e_1, e_1)_2 \approx 0.695 + 0.511i \neq 0$.

$$\begin{aligned} g_R(P_1 u) &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x k(x, y) (P_1 \mathcal{T}|_{E_1})^{-1} P_1 u(y) dy \Big|_{x=1} \\ &= \int_0^1 k_x(1, y) (P_1 \mathcal{T}|_{E_1})^{-1} P_1 u(y) dy + k(1, 1) \left[(P_1 \mathcal{T}|_{E_1})^{-1} P_1 u \right] \Big|_{x=1}. \end{aligned}$$

Teşekkürler!

Ortak yazarlar:

Varga K. Kalantarov (Koç U.)
Türker Özsarı (Bilkent U.)
Dionyssios Mantzavinos (U. of Kansas)

Destek:

Bu sunumda yer alan çalışmalar TÜBİTAK tarafından 1001 kodlu destek programı kapsamında #122F084 numaralı proje fonu ile desteklenmiştir.



V.K. Kalantarov, T. Özsarı, K.C. Yılmaz, *Finite dimensional backstepping controller design*, IEEE Trans. Automat. Control 70, (2025), 3816–3829.



D. Mantzavinos, T. Özsarı, K.C. Yılmaz, *The complex Ginzburg-Landau equation on a finite interval and chaos suppression via a finite-dimensional boundary feedback stabilizer*, Nonlinear Anal. Real World Appl. (basımda), (2026), arXiv: 2510.17635, 69 s.



V.K. Kalantarov, T. Özsarı, K.C. Yılmaz, *Finite-parameter boundary feedback controller design for damped wave equations*, (revizyonda), (2026) 30 s.



V.K. Kalantarov, T. Özsarı, K.C. Yılmaz, *Finite-mode backstepping control of a coupled phase-field system with fully and partial actuation*, (2026) 35 s.